Costel Chiteş **Daniel Petriceanu**

Andrei Vernescu

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a XI-a

M1

**Filiera teoretică, profil real,
specializarea matematică-informatică**

**Filiera Vocațională, profil militar, M.Ap.N.,
specializarea matematică-informatică**

EDITURA GIL

Cuprins

Capitolul 1

Matrice

Matricele constituie unul din instrumentele cele mai importante din materia de care ne vom ocupa. Înainte de a le defini vom arăta printr-un exemplu importanţa lor. Considerăm următoarea aplicaţie:

Dispunem de două sorturi de alimente, pe care le notăm cu A_1 şi A_2. Conţinutul în carbohidraţi, vitamine şi proteine al fiecărui aliment, precum şi preţul pe unitatea de masă este dat în tabelul următor:

Conţinutul în	A_1	A_2	Amestecul să conţină cel puţin
Carbohidraţi	1	3	8
Vitamine	3	4	19
Proteine	3	1	7
Preţul	$50u.b.$	$25u.b.$	

Se cere un amestec din aceste alimente care să verifice cerinţele menţionate în ultima coloană a tabelului de mai sus şi să corespundă preţului minim.

Notăm cu x_1, x_2 cantităţile din alimentele A_1 respectiv A_2 care vor intra în amestec.

Obţinem formularea matematică a problemei:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geqslant 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 19 \\ 3x_1 + x_2 \geqslant 7 \end{cases}.$$

În aceste ecuaţii va trebui să determinăm: $\min(50x_1 + 25x_2)$.

O metodă pentru a rezolva această problemă de programare liniară este dată de algoritmul simplex primal, care constă, în prima etapă, în a considera variabilele secundare pozitive x_3, x_4, x_5, astfel încât toate inecuaţiile să se transforme în ecuaţii.

Obţinem sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 19 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 7 \end{cases} \quad (1), \text{ pentru care trebuie să determinăm: } \min(50x_1 + 25x_2).$$

Coeficienţii necunoscutelor x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 vor fi aşezaţi în următorul tablou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; (2).$$

Tabloul (2) este matricea asociată sistemului (1).

Rezolvarea problemei de programare va fi făcută în capitolul *Semiplane. Elemente de programare liniară.*

Am văzut că o problemă practică ne conduce la studiul matricelor şi al operaţiilor cu matrice.

Sistemul de ecuaţii liniare, aşa cum este cel din relaţia (1), în cazul în care au două ecuaţii şi două necunoscute sau trei ecuaţii şi trei necunoscute se vor rezolva prin metode elementare: reducere sau substituţie.

Aplicaţii importante ale matricelor se găsesc şi în geometria analitică, unde fiecărei transformări geometrice i se asociază o matrice.

1.1 Definiţia matricei

Definiţia 1. *Fie K o submulţime a mulţimii numerelor complexe, $K \neq \emptyset, m, n \in \mathbb{N}^*$.*

O funcţie $A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to K$ se numeşte matrice cu m linii şi n coloane (matrice de tipul (m,n)) şi elemente din K.

Notăm $A(i, j) = a_{ij}, A(i, j) \in K, i \in \{1, 2, ..., m\}, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Pentru o scriere mai uşoară a valorilor funcţiei A vom utiliza următorul tablou:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tabloul (1) este identificat cu funcţia A.

Datorită relaţiei (1) se justifică denumirea de matrice cu m linii şi n coloane.

Matricea A se poate scrie prescurtat: $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$.

Observăm că a_{ij} *este elementul situat pe linia i şi coloana j din matricea A. Vom nota cu* $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ *mulţimea matricelor cu m linii şi n coloane şi elemente din mulţimea K.*

Dacă $m = n$, *vom scrie:* $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Pentru $m = 1$ *obţinem matrice de tipul:* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}$,

care se numeşte matrice linie sau matrice de tipul $(1, n)$.

Pentru $n = 1$, *obţinem matrice de tipul:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$ *care se numeşte matrice coloană sau matrice de tipul* $(m, 1)$.

Pentru $m = n$, *atunci* $A \in \mathcal{M}_n(K)$ *este numită matrice pătratică sau matrice de tipul* (n, n):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

În acest caz se pot defini diagonala principală şi diagonala secundară ale matricei A.

Diagonala principală este formată din elementele $a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}$, *iar diagonala secundară este formată din* $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$.

Exemple

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

   A este o matrice de tipul $(2, 2)$ în care $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 2, a_{22} = -1$. Cu notaţiile anterioare avem: $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

2. $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi \\ \ln 2 & -\sqrt{5} \\ e & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

   B este o matrice de tipul $(3, 2)$ cu elemente numere iraţionale, adică $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, în care:

   $b_{11} = \sqrt{3}, b_{12} = \pi, b_{21} = \ln 2, b_{22} = -\sqrt{5}, b_{31} = e, b_{32} = \sqrt{2}$.

1.2 Egalitatea matricelor

Am văzut că o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ este o funcţie, $A : \{1, 2, ..., m\} \times \{1, 2, ..., n\} \to K$.

Definiţia 2. *Fie* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ *două matrice* $(m, n, p, q \in \mathbb{N}^*)$. *Vom spune că* $A = B$ *dacă funcţiile A şi B sunt egale.*

Observaţie. *Dacă* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ *sunt două matrice* $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*)$, *atunci:* $A = B$ *dacă şi numai dacă* $m = p, n = q$ *şi* $A(i, j) = B(i, j), \forall i \in \overline{1, m}, \forall j \in \overline{1, n}$.

Exemplu

Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$A = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ să fie egale.

Soluţie:

Din ipoteză avem:

$A = B$, adică: $\sin x = \frac{1}{2}$ şi $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pentru $\sin x = \frac{1}{2}$ obţinem: $x \in \{(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. (1).

Pentru $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ obţinem: $x \in \{\pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$. (2).
Din relaţiile (1) şi (2) rezultă: $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$.

1.3 Adunarea matricelor

1.3.1 Definiţia adunării matricelor

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & a_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definim matricea: $C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & a_{3n} + b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + a_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$,

care se numeşte suma matricelor A şi B. Vom scrie: $C = A + B$.

Observaţie. *Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt matrice de acelaşi tip, $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, B = (b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$.*

Exemple

1. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$, atunci

   $A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+(-2) & -1+(-3) \\ 0+(-4) & 4+6 & 3+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ -4 & 10 & -2 \end{pmatrix}$

2. Dacă $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, atunci $A + B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, atunci A+B nu are sens,

   deoarece A este matrice de tipul $(3, 2)$, iar B este de tipul $(2, 3)$.

1.3.2 Proprietăţile adunării matricelor

1. Pentru $m, n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ este parte stabilă în raport cu adunarea matricelor, adică $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem $A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

   Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, B = (b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i \in \overline{1,m}, \forall j \in \overline{1,n}$.

   Numerele compexe au proprietatea: $x, y \in \mathbb{C} \Rightarrow x + y \in \mathbb{C}$.

   Obţinem: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. □

2. Comutativitatea: oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci $A + B = B + A$.

   Demonstraţie. Pentru $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, B = (b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci:

   $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, B + A = (b_{ij} + a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$

   Deoarece $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, iar adunarea numerelor din C este comutativă, atunci

   $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i \in \overline{1,m}, \forall j \in \overline{1,n}$, ceea ce arată că $A + B = B + A$. □

3. Asociativitatea: Oricare ar fi $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, avem $(A+B)+C = A+(B+C)$.

   Demonstraţie. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, B = (b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, C = (c_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci:
   $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, (A+B)+C = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}.$
   $B+C = (b_{ij}+b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}, A+(B+C) = (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}.$
   Deoarece adunarea numerelor complexe este asociativă, rezultă
   $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} = a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}), \forall i \in \overline{1,m}, \forall j \in \overline{1,n}.$
   Deci $(A+B)+C = A+(B+C)$. □

4. Elementul neutru: există matricea $O_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\{0\})$ oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ avem:
   $O_{m,n} + A = A + O_{m,n} = A.$
   Matricea $O_{m,n}$ are toate elementele zero şi se numeşte element neutru pentru adunarea matricelor.
   Justificarea proprietăţii este evidentă.

5. Simetrizabilitatea: oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, există o matrice notată
   $(-A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+(-A) = (-A)+A = O_{m,n}$.

   Demonstraţie. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci $-A = (-a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$. Cum $A+(-A) = (a_{ij}+(-a_{ij}))_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} = O_{m,n}$,
   $(-A)+A = ((-a_{ij})+a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} = O_{m,n}$, atunci $-A$ este matricea căutată. □

Observaţie. *Matricea $(-A)$ definită anterior, cu proprietatea $A+(-A) = (-A)+A = O_{m,n}$ este unică. Ea se numeşte simetrica matricei A sau matricea opusă a lui A.*

Dacă $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, vom scrie $A+(-B) = A-B$, care se numeşte diferenţa dintre A şi B.

1.4 Înmulţirea matricelor

1.4.1 Definiţia înmulţirii matricelor

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ o matrice de tipul (m,n) şi $B = (b_{jk})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ k\in\overline{1,p}}}$ o matrice de tipul (n,p), unde $m,n,p \in \mathbb{N}^*$.

Prin definiţie, matricea produs $A \cdot B$, în această ordine, este o matrice de tipul (m,p) ale cărei elemente sunt date prin egalităţile:

$(A \cdot B)(i,k) = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, (1) oricare ar fi $i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$.

Notăm $C = A \cdot B$; atunci $C \in \mathcal{M}_{m,p}(C)$, $C = (c_{ik})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ k\in\overline{1,p}}}$, unde elementul c_{ik} este dat de relaţia (1). Vom spune că matricea C este obţinută prin înmulţirea matricelor A şi B.

Elementul situat pe linia i şi coloana k în matricea produs este dat de relaţia (1), el fiind obţinut prin însumarea produselor elementelor de pe linia i din A cu cele de pe coloana k din B.

Putem scrie:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+...+a_{1n}b_{n2} & ... & a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+...+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+...+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+...+a_{2n}b_{n2} & ... & a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+...+a_{2n}b_{np} \\ .... & .... & ... & .... \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+...+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+...+a_{mn}b_{n2} & ... & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+...+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Observaţie. *Produsul a două matrice are sens numai când numărul coloanelor primei matrice este egal cu numărul liniilor celei de-a doua matrice.*

Este clar de aici că pentru două matrice pătratice, A şi B, au sens înmulţirile: $A \cdot B$ şi $B \cdot A$.

Exemple

1. Fie $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{pmatrix}$; atunci:

   $$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 & a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 & b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3 \end{pmatrix}$$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

Avem:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 + (-1)\cdot 0 & 1\cdot(-2) + (-1)\cdot(-1) & 1\cdot(-3) + (-1)\cdot(-5) \\ 2\cdot 4 + 3\cdot 0 & 2\cdot(-2) + 3\cdot(-1) & 2\cdot(-3) + 3\cdot(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

Deoarece B este de tipul $(2,3)$ şi A este de tipul $(2,2)$, nu are sens $B \cdot A$.

3. Dacă $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

atunci au sens produsele $A \cdot B$ şi $B \cdot A$.

Avem: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + (-1)\cdot 4 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 4 & 2\cdot 2 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 1 + 2\cdot 2 & 0\cdot(-1) + 2\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 2 & 4\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

Observăm că $A \cdot B \neq B \cdot A$.

1.4.2 Proprietăţile înmulţirii matricelor

1. Asociativitatea: oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$, atunci are loc egalitatea: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

Demonstraţie. Notăm $A' = A \cdot B, B' = B \cdot C$.

Din definiţia înmulţirii matricelor avem $A' \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$ şi $B' \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$.

Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m} \\ j\in\overline{1,n}}}, B = (b_{jk})_{\substack{j\in\overline{1,n} \\ k\in\overline{1,p}}}, C = (c_{kr})_{\substack{k\in\overline{1,p} \\ r\in\overline{1,q}}}$, atunci $A' = (a'_{ik})_{\substack{i\in\overline{1,m} \\ k\in\overline{1,p}}}, B' = (b'_{jr})_{\substack{j\in\overline{1,n} \\ r\in\overline{1,q}}}$;

obţinem:

$a'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$ (1)

$b'_{jr} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{jk}b_{kr}, \forall j \in \overline{1,n}, r \in \overline{1,q}$ (2) □

Fie $D = (A \cdot B) \cdot C = A' \cdot C, D = (d_{ir})_{\substack{i\in\overline{1,m} \\ r\in\overline{1,q}}}$ şi $E = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B'$, $E = (e_{ir})_{\substack{i\in\overline{1,m} \\ r\in\overline{1,q}}}$.

Folosind relaţiile (1) şi (2) avem:

$$d_{ir} = \sum_{k=1}^{p} a'_{ik}c_{kr} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kr} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kr}, \forall i \in \overline{1,m}, r \in \overline{1,q}.$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b'_{jr} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kr}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kr} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kr}, \forall i \in \overline{1,m}, r \in \overline{1,q}.$$

Relaţiile anterioare ne arată că matricele D şi E sunt egale, adică $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

2. Distributivitatea înmulţirii matricelor faţă de adunarea lor:

   (a) Oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avem: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

   (b) Oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ avem: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Demonstraţie. (a) Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m} \\ j\in\overline{1,n}}}, B = (b_{jk})_{\substack{j\in\overline{1,n} \\ k\in\overline{1,p}}}, C = (c_{jk})_{\substack{j\in\overline{1,n} \\ k\in\overline{1,p}}}$.

Notăm $D = A \cdot (B + C), A' = A \cdot B, C' = A \cdot C, E = A \cdot B + A \cdot C$.

Folosind definiţiile pentru adunare şi înmulţire obţinem:

$B + C = (b_{jk} + c_{jk})_{\substack{j\in\overline{1,n} \\ k\in\overline{1,p}}}$.

$D = (d_{ik})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ k\in\overline{1,p}}}, d_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$ (1)

$A' = (a'_{ik})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ k\in\overline{1,p}}}, c'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$

$C' = (c'_{ik})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ k\in\overline{1,p}}}, a'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$

Aşadar $E = (a'_{ik} + c'_{ik})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ k\in\overline{1,p}}}$ unde $a'_{ik} + c'_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $D = E$, adică
$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

(b) Se procedează la fel ca pentru afirmaţia 1).

□

3. Elementul neutru pentru înmulţirea matricelor pătratice:
$\exists I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât oricare ar fi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avem $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Matricea $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ este elementul neutru faţa de înmulţirea matricelor din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Matricea I_n se numeşte matricea unitate sau matricea identică.

Demonstraţie. Fie $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$ şi $I_n = (\delta_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$,

unde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$ este simbolul lui Kronecker.

Notăm $B = A \cdot I_n, B = (b_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$. Elementele matricei B se obţin din relaţia:

$b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}, \forall i,j \in \overline{1,n}$.

Egalitatea $b_{ij} = a_{ij}, \forall i,j \in \overline{1,n}$ ne arată că $B = A$, adică $A \cdot I_n = A$.
Analog se arată că $I_n \cdot A = A$. □

1.5 Înmulţirea cu scalari a matricelor

1.5.1 Definiţie

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ o matrice de tip (m,n) şi $x \in \mathbb{C}$. Matricea $x \cdot A$ ale cărei elemente sunt $x \cdot a_{ij}$, $i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$ se numeşte matricea produs dintre numărul complex x şi matricea A. Numărul x se numeşte scalar. Operaţia prin care se asociază numărului x şi matricei A matricea $x \cdot A$ se numeşte înmulţire cu scalari.

Prin definiţie avem: $x \cdot A = A \cdot x$.

Exemple

1. Fie $x = 2$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$. Atunci

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3 & 2\cdot 5 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot(-3) & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \\ -2 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. Dacă $x = i$ şi $A = \begin{pmatrix} 3-i & i \\ 4i & 1 \end{pmatrix}$, atunci $i \cdot A = \begin{pmatrix} i\cdot(3-i) & i\cdot i \\ i\cdot 4i & i\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i+1 & -1 \\ -4 & i \end{pmatrix}$.

1.5.2 Proprietăţile înmulţirii cu scalari

1. Dacă $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci $1 \cdot A = A$.

Demonstraţie. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci $1 \cdot A$ are elementele $1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$, adică aceleaşi cu ale matricei A, adică $1 \cdot A = A$. □

2. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $x, y \in \mathbb{C}$. Atunci $(x + y) \cdot A = x \cdot A + y \cdot A$.

Demonstraţie. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, atunci $x \cdot A = (x \cdot a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, $y \cdot A = (y \cdot a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$,

$(x+y) \cdot A = ((x+y) \cdot a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} = (x \cdot a_{ij} + y \cdot a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} = (x \cdot a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} + (y \cdot a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}} = x \cdot A + y \cdot A$. □

3. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $x, y \in \mathbb{C}$. Atunci $(xy) \cdot A = x \cdot (y \cdot A)$.
4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $x \in \mathbb{C}$. Atunci $x \cdot (A + B) = x \cdot A + x \cdot B$.
5. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ şi $x \in C$. Atunci
$x \cdot (A \cdot B) = (x \cdot A) \cdot B = A \cdot (x \cdot B)$.
Demonstraţiile afirmaţiilor iii),iv) v) sunt asemănătoare cu cele ale afirmaţiilor i) şi ii).

1.6 Transpusa unei matrice

1.6.1 Definiţie

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ o matrice de tip (m, n).
Matricea care are elementele $(a_{ji})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ i\in\overline{1,m}}}$ se numeşte matricea transpusă a lui A şi se notează cu ${}^tA$.
Observăm că ${}^tA$ se obţine din matricea A prin schimbarea respectiv a liniilor cu coloanele lui A, adică prima linie a lui A devine prima coloana a lui ${}^tA$, a doua linie a lui A devine a doua coloană a lui ${}^tA$ ş.a.m.d.
Este evident că ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.
Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ şi $A = {}^tA$ vom spune că A este matrice simetrică.
Exemplu

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & i & -2 & \sqrt{3} \\ 2i & 3 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$ o matrice $(3, 4)$.

Atunci ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2i \\ 1 & i & 3 \\ -1 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$ este matricea traspusă a lui A.

1.6.2 Proprietăţi

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Atunci ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$.

Demonstraţie. Dacă $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$ şi $B = (b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, avem: ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ i\in\overline{1,m}}}$, ${}^tB = (b_{ji})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ i\in\overline{1,m}}}$.

Cum $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, rezultă că ${}^t(A + B) = (a_{ji} + b_{ji})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ i\in\overline{1,m}}}$.

Deoarece ${}^tA + {}^tB = (a_{ji} + b_{ji})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ i\in\overline{1,m}}}$, obţinem că ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$. □

2. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), x \in \mathbb{C}$. Atunci ${}^t(x \cdot A) = x \cdot {}^tA$.
Demonstraţia o lăsăm ca exerciţiu.

3. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Atunci ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

Demonstrație. Considerăm $A = (a_{ij})_{\substack{i\in\overline{1,m}\\ j\in\overline{1,n}}}$, $B = (b_{jk})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ k\in\overline{1,p}}}$.

Din definiția matricei transpuse rezultă: ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{j\in\overline{1,n}\\ i\in\overline{1,m}}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$,

${}^tB = (b_{kj})_{\substack{k\in\overline{1,p}\\ j\in\overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$. Notăm $C = {}^t(A\cdot B)$, $C = (c_{ki})_{\substack{k\in\overline{1,p}\\ i\in\overline{1,m}}}$, $D = {}^tB \cdot {}^tA$, $D = (d_{ki})_{\substack{k\in\overline{1,p}\\ i\in\overline{1,m}}}$

Elementele matricelor C și D sunt date de egalitățile următoare:

$c_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}, k \in \overline{1,p}, i \in \overline{1,m}$ (1)

$d_{ki} = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{jk}a_{ij}, k \in \overline{1,p}, i \in \overline{1,m}$

Relația (1) ne arată că $C = D$, adică ${}^t(A\cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$.

□

4. Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Atunci ${}^t({}^tA) = A$.

Demonstrație. Proprietatea este evidentă, datorită definiției matricei ${}^tA$. □

1.7 Urma unei matrice

1.7.1 Definiție

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$.

Numărul $\mathrm{Tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$ se numește urma matricei A.

(Notația $\mathrm{Tr}(A)$ provine din cuvântul trace = urmă în franceză și engleză).

1.7.2 Proprietăți

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Atunci $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.

Demonstrație. Considerăm $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$ și $B = (b_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$. Avem $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$.

Obținem $\mathrm{Tr}(A+B) = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$. □

2. Fie $x \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Atunci $Tr(x\cdot A) = x\cdot\mathrm{Tr}(A)$.
   Demonstrația o lăsăm ca exercițiu.

3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Atunci $\mathrm{Tr}(A\cdot B) = \mathrm{Tr}(B\cdot A)$.

Demonstrație. Dacă $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$, $B = (b_{ij})_{i,j\in\overline{1,n}}$, $C = A\cdot B, D = B\cdot A$, atunci elementele matricei C sunt $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, iar elementele matricei D, sunt $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}$, unde $i, j \in \overline{1,n}$.

Urmele matricelor $A\cdot B$ și $B\cdot A$ sunt date de egalitățile următoare:

$\mathrm{Tr}(A\cdot B) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$ (1)

$\mathrm{Tr}(B\cdot A) = \sum\limits_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$ (2)

Relațiile (1) și (2) conduc la egalitatea urmelor matricelor $A\cdot B$ și $B\cdot A$. □