

**Costel Chiteș**

**Daniel Petriceanu**

**Andrei Vernescu**

# MATEMATICĂ

**Manual pentru clasa a XI-a**

**M1**

**Filiera teoretică, profil real,  
specializarea matematică-informatică**

**Filiera Vocațională, profil militar, M.Ap.N.,  
specializarea matematică-informatică**

EDITURA GIL

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Matrice</b>	<b>5</b>
1.1	Definiția matricei . . . . .	5
1.2	Egalitatea matricelor . . . . .	6
1.3	Adunarea matricelor . . . . .	7
1.3.1	Definiția adunării matricelor . . . . .	7
1.3.2	Proprietățile adunării matricelor . . . . .	7
1.4	Înmulțirea matricelor . . . . .	8
1.4.1	Definiția înmulțirii matricelor . . . . .	8
1.4.2	Proprietățile înmulțirii matricelor . . . . .	9
1.5	Înmulțirea cu scalari a matricelor . . . . .	10
1.5.1	Definiție . . . . .	10
1.5.2	Proprietățile înmulțirii cu scalari . . . . .	11
1.6	Transpusa unei matrice . . . . .	11
1.6.1	Definiție . . . . .	11
1.6.2	Proprietăți . . . . .	11
1.7	Urma unei matrice . . . . .	12
1.7.1	Definiție . . . . .	12
1.7.2	Proprietăți . . . . .	12
1.8	Calculul puterilor unei matrice . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Permutări</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Determinanți</b>	<b>23</b>
3.1	Aplicații ale determinanților . . . . .	31
3.1.1	Coliniaritatea a trei puncte . . . . .	31
3.1.2	Aria unui triunghi . . . . .	31
3.1.3	Coplanaritatea a patru puncte. Volumul tetraedrului . . . . .	32
3.2	Rangul unei matrice. Matrice inversabile . . . . .	35
3.2.1	Rangul unei matrice . . . . .	35
3.2.2	Proprietățile rangului unei matrice . . . . .	35
3.3	Matrice inversabile . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Sisteme de ecuații liniare</b>	<b>39</b>
4.1	Metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare . . . . .	39
4.1.1	Rezolvare matriceală . . . . .	39
4.1.2	Sisteme liniare de tip Cramer . . . . .	40
4.1.3	Metoda lui Gauss . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Semiplane. Elemente de programare liniară</b>	<b>47</b>
5.1	Semiplane . . . . .	47
5.2	Elemente de programare liniară . . . . .	48
<b>6</b>	<b>ANALIZĂ MATEMATICĂ</b>	
	<b>Mulțimea numerelor reale</b>	<b>51</b>
6.1	Structura algebrică . . . . .	52
6.2	Structura de ordine . . . . .	52
6.3	Caracterizări ale marginii superioare (respectiv inferioare) . . . . .	53

<b>7</b>	<b>Limite de funcții</b>	<b>65</b>
7.1	Moduri de definire a unui șir	65
7.2	Șiruri definite prin relații de recurență liniare	65
7.3	Operații cu șiruri reale	67
7.4	Șiruri monotone	68
7.5	Șiruri mărginite	69
7.6	Limite de șiruri. Șiruri convergente	70
7.7	Teorema de convergență a șirurilor monotone	72
7.8	Operații cu șiruri convergente	74
7.9	Subșiruri ale unui șir de numere reale	75
7.10	Calculul limitelor de șiruri în $\overline{\mathbb{R}}$	77
7.11	Limite remarcabile cu funcții trigonometrice	83
7.12	Reguli de calcul în $\overline{\mathbb{R}}$	84
7.13	Șirul lui Euler (numărul $e$ )	88
7.14	Alte limite de șiruri	91
7.15	Definiția limitei unei funcții într-un punct	99
7.16	Caracterizări echivalente pentru limita unei funcții într-un punct	102
7.17	Calculul limitelor pentru funcții elementare	103
7.18	Limite laterale	103
7.19	Existența și calculul limitei cu ajutorul limitelor laterale	105
7.20	Existența limitelor laterale pentru funcții monotone	106
7.21	Calculul limitelor de funcții în $\overline{\mathbb{R}}$	106
7.21.1	Operații algebrice cu limite de funcții	106
7.21.2	Criteriul majorării	106
7.21.3	Trecerea la limită în inegalități	107
7.21.4	Criteriul cleștelui	107
7.21.5	Limita compunerii de funcții	108
7.21.6	Limite ale funcțiilor elementare în puncte de acumulare care nu aparțin domeniului de definiție	108
7.21.7	Limite remarcabile	109
<b>8</b>	<b>Funcții continue</b>	<b>113</b>
8.1	Definiția continuității unei funcții într-un punct	113
8.2	Caracterizări echivalente ale continuității unei funcții într-un punct	114
8.3	Puncte de discontinuitate	115
8.4	Continuitate la stânga și continuitate la dreapta	116
8.5	Funcții continue pe mulțimi	116
8.6	Operații cu funcții continue	118
8.7	Funcții de tip Dirichlet	121
8.8	Prelungirea prin continuitate a unei funcții	122
8.9	Ecuatii funcționale	123
8.10	Funcții cu proprietatea lui Darboux	125
<b>9</b>	<b>Funcții derivabile</b>	<b>131</b>
9.1	Probleme care conduc la noțiunea de derivată	131
9.2	Derivate laterale. Interpretare geometrică	134
9.3	Exemple de funcții derivabile	139
9.4	Operații cu funcții derivabile	141
9.4.1	Operații algebrice	141
9.5	Derivate de ordin superior	148
9.6	Diferențiala unei funcții	153
9.7	Proprietăți generale ale funcțiilor derivabile	155
9.8	Teorema lui Rolle. Șirul lui Rolle	157
9.9	Calculul unor limite de funcții cu ajutorul derivatelor	166
9.9.1	Reducerea cazului exceptat " $0 \cdot (\pm\infty)$ " la unul din cazurile " $\frac{0}{0}$ " sau " $\frac{\infty}{\infty}$ "	166
9.9.2	Reducerea cazului exceptat " $\infty - \infty$ " la cazul " $\frac{0}{0}$ "	166
9.9.3	Reducerea cazurilor exceptate " $1^\infty$ ", " $\infty^0$ ", " $0^0$ " la cazurile studiate	166
9.10	Formula lui Taylor	167
9.10.1	Formula lui Taylor cu restul lui Peano	168

<b>10 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor</b>	<b>169</b>
10.1 Convexitate și concavitate	169
10.2 Puncte de inflexiune	172
10.3 Asimptote	173
10.3.1 Asimptote verticale	173
10.3.2 Asimptote orizontale	174
10.3.3 Asimptote oblice	174
10.4 Grafice de funcții	175
10.4.1 Domeniul de definiție	175
10.4.2 Intersecția cu axele de coordonate	175
10.4.3 Comportarea funcției în punctele din $D \cup D'$	175
10.4.4 Studiul primei derivate	175
10.4.5 Studiul celei de-a doua derivate	176
10.4.6 Tabelul de variație	176
10.4.7 Trasarea graficului	176
<b>11 Conice</b>	<b>181</b>
11.1 Cercul	181
11.2 Elipsa	182
11.2.1 Tangenta la elipsă într-un punct al său	184
11.3 Hiperbola	185
11.3.1 Procedeul de construcție a hiperbolei	185
11.3.2 Tangenta la hiperbolă într-un punct al său	186
11.4 Parabola	187
11.4.1 Procedeul de construcție a parabolei	187
11.4.2 Tangenta la parabolă într-un punct al său	188
<b>12 Soluții</b>	<b>192</b>

## Capitolul 1

# Matrice

Matricele constituie unul din instrumentele cele mai importante din materia de care ne vom ocupa. Înainte de a le defini vom arăta printr-un exemplu importanța lor. Considerăm următoarea aplicație:

Disponem de două sorturi de alimente, pe care le notăm cu  $A_1$  și  $A_2$ . Conținutul în carbohidrați, vitamine și proteine al fiecărui aliment, precum și prețul pe unitatea de masă este dat în tabelul următor:

Conținutul în	$A_1$	$A_2$	Amestecul să conțină cel puțin
Carbohidrați	1	3	8
Vitamine	3	4	19
Proteine	3	1	7
Prețul	50u.b.	25u.b.	

Se cere un amestec din aceste alimente care să verifice cerințele menționate în ultima coloană a tabelului de mai sus și să corespundă prețului minim.

Notăm cu  $x_1, x_2$  cantitățile din alimentele  $A_1$  respectiv  $A_2$  care vor intra în amestec.

Obținem formularea matematică a problemei:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 19 \\ 3x_1 + x_2 \geq 7 \end{cases} .$$

În aceste ecuații va trebui să determinăm:  $\min(50x_1 + 25x_2)$ .

O metodă pentru a rezolva această problemă de programare liniară este dată de algoritmul simplex primal, care constă, în prima etapă, în a considera variabilele secundare pozitive  $x_3, x_4, x_5$ , astfel încât toate inecuațiile să se transforme în ecuații.

Obținem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 19 \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 7 \end{cases} \quad (1), \text{ pentru care trebuie să determinăm: } \min(50x_1 + 25x_2).$$

Coefficienții necunoscutelor  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  vor fi așezați în următorul tablou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2).$$

Tabloul (2) este matricea asociată sistemului (1).

Rezolvarea problemei de programare va fi făcută în capitolul *Semiplane. Elemente de programare liniară*. Am văzut că o problemă practică ne conduce la studiul matricelor și al operațiilor cu matrice.

Sistemul de ecuații liniare, așa cum este cel din relația (1), în cazul în care au două ecuații și două necunoscute sau trei ecuații și trei necunoscute se vor rezolva prin metode elementare: reducere sau substituție.

Aplicații importante ale matricelor se găsesc și în geometria analitică, unde fiecărei transformări geometrice i se asociază o matrice.

### 1.1 Definiția matricei

**Definiția 1.** Fie  $K$  o submulțime a mulțimii numerelor complexe,  $K \neq \emptyset, m, n \in \mathbb{N}^*$ .

O funcție  $A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$  se numește matrice cu  $m$  linii și  $n$  coloane (matrice de tipul  $(m, n)$ ) și elemente din  $K$ .

Notăm  $A(i, j) = a_{ij}, A(i, j) \in K, i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Pentru o scriere mai ușoară a valorilor funcției  $A$  vom utiliza următorul tablou:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Tabloul (1) este identificat cu funcția  $A$ .

Datorită relației (1) se justifică denumirea de matrice cu  $m$  linii și  $n$  coloane.

Matricea  $A$  se poate scrie prescurtat:  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ .

Observăm că  $a_{ij}$  este elementul situat pe linia  $i$  și coloana  $j$  din matricea  $A$ . Vom nota cu  $\mathcal{M}_{m,n}(K)$  mulțimea matricelor cu  $m$  linii și  $n$  coloane și elemente din mulțimea  $K$ .

Dacă  $m = n$ , vom scrie:  $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{m,n}(K)$ .

Pentru  $m = 1$  obținem matrice de tipul:  $A = (a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n})$ , care se numește matrice linie sau matrice de tipul  $(1, n)$ .

Pentru  $n = 1$ , obținem matrice de tipul:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \text{ care se numește matrice coloană sau matrice de tipul } (m, 1).$$

Pentru  $m = n$ , atunci  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  este numită matrice pătratică sau matrice de tipul  $(n, n)$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

În acest caz se pot defini diagonala principală și diagonala secundară ale matricei  $A$ .

Diagonala principală este formată din elementele  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ , iar diagonala secundară este formată din  $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ .

**Exemple**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

$A$  este o matrice de tipul  $(2, 2)$  în care  $a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{21} = 2, a_{22} = -1$ . Cu notațiile anterioare avem:  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ .

2.  $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi \\ \ln 2 & -\sqrt{5} \\ e & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$

$B$  este o matrice de tipul  $(3, 2)$  cu elemente numere iraționale, adică  $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ , în care:

$b_{11} = \sqrt{3}, b_{12} = \pi, b_{21} = \ln 2, b_{22} = -\sqrt{5}, b_{31} = e, b_{32} = \sqrt{2}.$

**1.2 Egalitatea matricelor**

Am văzut că o matrice  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$  este o funcție,  $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$ .

**Definiția 2.** Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$  două matrice ( $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ ). Vom spune că  $A = B$  dacă funcțiile  $A$  și  $B$  sunt egale.

**Observație.** Dacă  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K), B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$  sunt două matrice ( $m, n, p, q \in \mathbb{N}^*$ ), atunci:  $A = B$  dacă și numai dacă  $m = p, n = q$  și  $A(i, j) = B(i, j), \forall i \in \overline{1, m}, \forall j \in \overline{1, n}$ .

**Exemplu**

Să se determine  $x \in \mathbb{R}$  astfel încât

$A = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  să fie egale.

*Soluție:*

Din ipoteză avem:

$A = B$ , adică:  $\sin x = \frac{1}{2}$  și  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Pentru  $\sin x = \frac{1}{2}$  obținem:  $x \in \{(-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ . (1).

Pentru  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  obținem:  $x \in \{\pm \frac{\pi}{6} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ . (2).  
 Din relațiile (1) și (2) rezultă:  $x \in \{\frac{\pi}{6} + 2n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ .

## 1.3 Adunarea matricelor

### 1.3.1 Definiția adunării matricelor

Fie  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definim matricea:  $C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \dots & a_{3n} + b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$

care se numește suma matricelor  $A$  și  $B$ . Vom scrie:  $C = A + B$ .

**Observație.** Dacă  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  sunt matrice de același tip,  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  
 atunci  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ .

#### Exemple

1. Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -4 & 6 & -5 \end{pmatrix}$ , atunci

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+(-2) & -1+(-3) \\ 0+(-4) & 4+6 & 3+(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ -4 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Dacă  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , atunci  $A + B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

3. Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ , atunci  $A+B$  nu are sens,

deoarece  $A$  este matrice de tipul  $(3, 2)$ , iar  $B$  este de tipul  $(2, 3)$ .

### 1.3.2 Proprietățile adunării matricelor

1. Pentru  $m, n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  este parte stabilă în raport cu adunarea matricelor, adică  $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  avem  $A + B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ .

*Demonstrație.* Fie  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}, \forall i \in \overline{1,m}, \forall j \in \overline{1,n}$ .

Numerele complexe au proprietatea:  $x, y \in \mathbb{C} \Rightarrow x + y \in \mathbb{C}$ .

Obținem:  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ . □

2. Comutativitatea: oricare ar fi  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , atunci  $A + B = B + A$ .

*Demonstrație.* Pentru  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , atunci:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}, B + A = (b_{ij} + a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$$

Deoarece  $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$ , iar adunarea numerelor din  $\mathbb{C}$  este comutativă, atunci

$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}, \forall i \in \overline{1,m}, \forall j \in \overline{1,n}$ , ceea ce arată că  $A + B = B + A$ . □

3. Asociativitatea: Oricare ar fi  $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , avem  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .

*Demonstrație.* Dacă  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $C = (c_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , atunci:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}, (A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$$

$$B + C = (b_{ij} + c_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}, A + (B + C) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$$

Deoarece adunarea numerelor complexe este asociativă, rezultă

$$(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}), \forall i \in \overline{1,m}, \forall j \in \overline{1,n}.$$

Deci  $(A + B) + C = A + (B + C)$ . □

4. Elementul neutru: există matricea  $O_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\{0\})$  oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  avem:

$$O_{m,n} + A = A + O_{m,n} = A.$$

Matricea  $O_{m,n}$  are toate elementele zero și se numește element neutru pentru adunarea matricelor.

Justificarea proprietății este evidentă.

5. Simetrizabilitatea: oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , există o matrice notată

$$(-A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \text{ astfel încât } A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}.$$

*Demonstrație.* Dacă  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , atunci  $-A = (-a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ . Cum  $A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij}))_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} = O_{m,n}$ ,  
 $(-A) + A = ((-a_{ij}) + a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} = O_{m,n}$ , atunci  $-A$  este matricea căutată. □

**Observație.** Matricea  $(-A)$  definită anterior, cu proprietatea  $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$  este unică. Ea se numește simetrica matricei  $A$  sau matricea opusă a lui  $A$ .

Dacă  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , vom scrie  $A + (-B) = A - B$ , care se numește diferența dintre  $A$  și  $B$ .

## 1.4 Înmulțirea matricelor

### 1.4.1 Definiția înmulțirii matricelor

Fie  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$  o matrice de tipul  $(m, n)$  și  $B = (b_{jk})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ k \in \overline{1,p}}}$  o matrice de tipul  $(n, p)$ , unde  $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ .

Prin definiție, matricea produs  $A \cdot B$ , în această ordine, este o matrice de tipul  $(m, p)$  ale cărei elemente sunt date prin egalitățile:

$$(A \cdot B)(i, k) = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad (1) \text{ oricare ar fi } i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}.$$

Notăm  $C = A \cdot B$ ; atunci  $C \in \mathcal{M}_{m,p}(C)$ ,  $C = (c_{ik})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ k \in \overline{1,p}}}$ , unde elementul  $c_{ik}$  este dat de relația (1). Vom spune că matricea  $C$  este obținută prin înmulțirea matricelor  $A$  și  $B$ .

Elementul situat pe linia  $i$  și coloana  $k$  în matricea produs este dat de relația (1), el fiind obținut prin însumarea produselor elementelor de pe linia  $i$  din  $A$  cu cele de pe coloana  $k$  din  $B$ .

Putem scrie:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \dots + a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \dots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \dots + a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \dots + a_{2n}b_{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \dots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \dots + a_{mn}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \dots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

**Observație.** Produsul a două matrice are sens numai când numărul coloanelor primei matrice este egal cu numărul liniilor celei de-a doua matrice.

Este clar de aici că pentru două matrice pătratice,  $A$  și  $B$ , au sens înmulțirile:  $A \cdot B$  și  $B \cdot A$ .

#### Exemple

1. Fie  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 \end{pmatrix}$ ; atunci:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 & a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 & a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 & b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 & b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \end{pmatrix}$$

2. Fie  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

Avem:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-5) \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

Deoarece  $B$  este de tipul  $(2, 3)$  și  $A$  este de tipul  $(2, 2)$ , nu are sens  $B \cdot A$ .

3. Dacă  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,

atunci au sens produsele  $A \cdot B$  și  $B \cdot A$ .

$$\text{Avem: } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Observăm că  $A \cdot B \neq B \cdot A$ .

### 1.4.2 Proprietățile înmulțirii matricelor

1. Asociativitatea: oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ , atunci are loc egalitatea:  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

*Demonstrație.* Notăm  $A' = A \cdot B, B' = B \cdot C$ .

Din definiția înmulțirii matricelor avem  $A' \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C})$  și  $B' \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ .

Dacă  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}, B = (b_{jk})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ k \in \overline{1,p}}}, C = (c_{kr})_{\substack{k \in \overline{1,p} \\ r \in \overline{1,q}}}$ , atunci  $A' = (a'_{ik})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ k \in \overline{1,p}}}, B' = (b'_{jr})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ r \in \overline{1,q}}}$ ;

obținem:

$$a'_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p} \quad (1)$$

$$b'_{jr} = \sum_{k=1}^p a_{jk} b_{kr}, \forall j \in \overline{1,n}, r \in \overline{1,q} \quad (2)$$

□

Fie  $D = (A \cdot B) \cdot C = A' \cdot C, D = (d_{ir})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ r \in \overline{1,q}}}$  și  $E = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B', E = (e_{ir})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ r \in \overline{1,q}}}$ .

Folosind relațiile (1) și (2) avem:

$$d_{ir} = \sum_{k=1}^p a'_{ik} c_{kr} = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) c_{kr} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kr}, \forall i \in \overline{1,m}, r \in \overline{1,q}.$$

$$e_{ir} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b'_{jr} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left( \sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kr} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kr} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kr}, \forall i \in \overline{1,m}, r \in \overline{1,q}.$$

Relațiile anterioare ne arată că matricele  $D$  și  $E$  sunt egale, adică  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

2. Distributivitatea înmulțirii matricelor față de adunarea lor:

(a) Oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  avem:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

(b) Oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  avem:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

*Demonstrație.* (a) Fie  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}, B = (b_{jk})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ k \in \overline{1,p}}}, C = (c_{jk})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ k \in \overline{1,p}}}$ .

Notăm  $D = A \cdot (B + C), A' = A \cdot B, C' = A \cdot C, E = A \cdot B + A \cdot C$ .

Folosind definițiile pentru adunare și înmulțire obținem:

$$B + C = (b_{jk} + c_{jk})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ k \in \overline{1,p}}}.$$

$$D = (d_{ik})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ k \in \overline{1,p}}}, d_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p} \quad (1)$$

$$A' = (a'_{ik})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ k \in \overline{1,p}}}, a'_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$$

$$C' = (c'_{ik})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ k \in \overline{1,p}}}, a'_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p}$$

$$\text{Așadar } E = (a'_{ik} + c'_{ik})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ k \in \overline{1,p}}} \text{ unde } a'_{ik} + c'_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk}, \forall i \in \overline{1,m}, k \in \overline{1,p} \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) rezultă că  $D = E$ , adică

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

(b) Se procedează la fel ca pentru afirmația 1). □

3. Elementul neutru pentru înmulțirea matricelor pătratice:

$\exists I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  astfel încât oricare ar fi  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avem  $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ .

$$\text{Matricea } I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ este elementul neutru față de înmulțirea matricelor din } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Matricea  $I_n$  se numește matricea unitate sau matricea identică.

*Demonstrație.* Fie  $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$  și  $I_n = (\delta_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ ,

unde  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j \end{cases}$  este simbolul lui Kronecker.

Notăm  $B = A \cdot I_n$ ,  $B = (b_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ . Elementele matricei  $B$  se obțin din relația:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij}\delta_{jj} = a_{ij}, \forall i, j \in \overline{1,n}.$$

Egalitatea  $b_{ij} = a_{ij}, \forall i, j \in \overline{1,n}$  ne arată că  $B = A$ , adică  $A \cdot I_n = A$ .

Analog se arată că  $I_n \cdot A = A$ . □

## 1.5 Înmulțirea cu scalari a matricelor

### 1.5.1 Definiție

Fie  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$  o matrice de tip  $(m, n)$  și  $x \in \mathbb{C}$ . Matricea  $x \cdot A$  ale cărei elemente sunt  $x \cdot a_{ij}$ ,  $i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}$  se numește matricea produs dintre numărul complex  $x$  și matricea  $A$ . Numărul  $x$  se numește scalar. Operația prin care se asociază numărului  $x$  și matricei  $A$  matricea  $x \cdot A$  se numește înmulțire cu scalari.

Prin definiție avem:  $x \cdot A = A \cdot x$ .

**Exemple**

1. Fie  $x = 2$  și  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ . Atunci

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) & 2 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \\ -2 & -6 & 12 \end{pmatrix}.$$

2. Dacă  $x = i$  și  $A = \begin{pmatrix} 3-i & i \\ 4i & 1 \end{pmatrix}$ , atunci  $i \cdot A = \begin{pmatrix} i \cdot (3-i) & i \cdot i \\ i \cdot 4i & i \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3i+1 & -1 \\ -4 & i \end{pmatrix}$ .

### 1.5.2 Proprietățile înmulțirii cu scalari

1. Dacă  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ , atunci  $1 \cdot A = A$ .

*Demonstrație.* Dacă  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , atunci  $1 \cdot A$  are elementele  $1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$ ,

adică aceleași cu ale matricei  $A$ , adică  $1 \cdot A = A$ . □

2. Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $x, y \in \mathbb{C}$ . Atunci  $(x + y) \cdot A = x \cdot A + y \cdot A$ .

*Demonstrație.* Dacă  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , atunci  $x \cdot A = (x \cdot a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $y \cdot A = (y \cdot a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,

$(x + y) \cdot A = ((x + y) \cdot a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} = (x \cdot a_{ij} + y \cdot a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} = (x \cdot a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} + (y \cdot a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}} = x \cdot A + y \cdot A$ . □

3. Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $x, y \in \mathbb{C}$ . Atunci  $(xy) \cdot A = x \cdot (y \cdot A)$ .

4. Fie  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$  și  $x \in \mathbb{C}$ . Atunci  $x \cdot (A + B) = x \cdot A + x \cdot B$ .

5. Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$  și  $x \in \mathbb{C}$ . Atunci

$$x \cdot (A \cdot B) = (x \cdot A) \cdot B = A \cdot (x \cdot B).$$

Demonstrațiile afirmațiilor iii), iv) v) sunt asemănătoare cu cele ale afirmațiilor i) și ii).

## 1.6 Transpusa unei matrice

### 1.6.1 Definiție

Fie  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$  o matrice de tip  $(m, n)$ .

Matricea care are elementele  $(a_{ji})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ i \in \overline{1,m}}}$  se numește matricea transpusă a lui  $A$  și se notează cu  ${}^tA$ .

Observăm că  ${}^tA$  se obține din matricea  $A$  prin schimbarea respectiv a liniilor cu coloanele lui  $A$ , adică prima linie a lui  $A$  devine prima coloană a lui  ${}^tA$ , a doua linie a lui  $A$  devine a doua coloană a lui  ${}^tA$  ș.a.m.d.

Este evident că  ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ .

Dacă  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  și  $A = {}^tA$  vom spune că  $A$  este matrice simetrică.

#### Exemplu

Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & i & -2 & \sqrt{3} \\ 2i & 3 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$  o matrice  $(3, 4)$ .

Atunci  ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2i \\ 1 & i & 3 \\ -1 & -2 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}$  este matricea traspusă a lui  $A$ .

### 1.6.2 Proprietăți

1. Fie  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ . Atunci  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ .

*Demonstrație.* Dacă  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$  și  $B = (b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , avem:  ${}^tA = (a_{ji})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ i \in \overline{1,m}}}$ ,  ${}^tB = (b_{ji})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ i \in \overline{1,m}}}$ .

Cum  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ , rezultă că  ${}^t(A + B) = (a_{ji} + b_{ji})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ i \in \overline{1,m}}}$ .

Deoarece  ${}^tA + {}^tB = (a_{ji} + b_{ji})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ i \in \overline{1,m}}}$ , obținem că  ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ . □

2. Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $x \in \mathbb{C}$ . Atunci  ${}^t(x \cdot A) = x \cdot {}^tA$ .

Demonstrația o lășăm ca exercițiu.

3. Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ . Atunci  ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$ .

*Demonstrație.* Considerăm  $A = (a_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,m} \\ j \in \overline{1,n}}}$ ,  $B = (b_{jk})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ k \in \overline{1,p}}}$ .

Din definiția matricei transpuse rezultă:  ${}^t A = (a_{ji})_{\substack{j \in \overline{1,n} \\ i \in \overline{1,m}}} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ ,

${}^t B = (b_{kj})_{\substack{k \in \overline{1,p} \\ j \in \overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$ . Notăm  $C = {}^t(A \cdot B)$ ,  $C = (c_{ki})_{\substack{k \in \overline{1,p} \\ i \in \overline{1,m}}}$ ,  $D = {}^t B \cdot {}^t A$ ,  $D = (d_{ki})_{\substack{k \in \overline{1,p} \\ i \in \overline{1,m}}}$

Elementele matricelor  $C$  și  $D$  sunt date de egalitățile următoare:

$$c_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}, k \in \overline{1,p}, i \in \overline{1,m} \quad (1)$$

$$d_{ki} = \sum_{j=1}^n b_{jk} a_{ij}, k \in \overline{1,p}, i \in \overline{1,m}$$

Relația (1) ne arată că  $C = D$ , adică  ${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A$ . □

4. Fie  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ . Atunci  ${}^t({}^t A) = A$ . □

*Demonstrație.* Proprietatea este evidentă, datorită definiției matricei  ${}^t A$ . □

## 1.7 Urma unei matrice

### 1.7.1 Definiție

Fie  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ .

Numărul  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  se numește urma matricei  $A$ .

(Notația  $\text{Tr}(A)$  provine din cuvântul trace = urmă în franceză și engleză).

### 1.7.2 Proprietăți

1. Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Atunci  $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ .

*Demonstrație.* Considerăm  $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$  și  $B = (b_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ . Avem  $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ .

Obținem  $\text{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ . □

2. Fie  $x \in \mathbb{C}$ ,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Atunci  $\text{Tr}(x \cdot A) = x \cdot \text{Tr}(A)$ .

Demonstrația o lășăm ca exercițiu.

3. Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Atunci  $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$ .

*Demonstrație.* Dacă  $A = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ ,  $B = (b_{ij})_{i,j \in \overline{1,n}}$ ,  $C = A \cdot B$ ,  $D = B \cdot A$ , atunci elementele matricei  $C$  sunt

$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ , iar elementele matricei  $D$ , sunt  $d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$ , unde  $i, j \in \overline{1,n}$ .

Urmele matricelor  $A \cdot B$  și  $B \cdot A$  sunt date de egalitățile următoare:

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \quad (1)$$

$$\text{Tr}(B \cdot A) = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ji} a_{ij} \quad (2)$$

Relațiile (1) și (2) conduc la egalitatea urmelor matricelor  $A \cdot B$  și  $B \cdot A$ . □